

Primena fuzzy PERT metode u projektnom planiranju

DANIJELA V. TOLJAGA-NIKOLIĆ, Univerzitet u Beogradu,

Fakultet organizacionih nauka, Beograd

DEJAN Č. PETROVIĆ, Univerzitet u Beogradu,

Fakultet organizacionih nauka, Beograd

MILIJA M. SUKNOVIĆ, Univerzitet u Beogradu,

Fakultet organizacionih nauka, Beograd

MARKO M. MIHIĆ, Univerzitet u Beogradu,

Fakultet organizacionih nauka, Beograd

Originalni naučni rad

UDC: 005.821

U procesu projektnog planiranja neophodno je da projektni menadžer pažljivo procenjuje vrednosti ulaznih elemenata procesa, koje su često opterećene neizvesnošću. Kako se radi o projektu koji se realizuje u budućnosti, nisu uvek unapred poznati svi uslovi pod kojima će se aktivnosti obavljati. Zbog toga neke vrednosti, kao što je vreme trajanja aktivnosti, količina potrebnih resursa, itd, ne mogu biti precizno određene u fazi planiranja. U vezi sa tim, postoji potreba da se pronade adekvatan način za tretiranje te neizvesnosti i uspešno projektno planiranje. U radu se prezentuju karakteristike i osnovni elementi uključivanja fuzzy sistema u primenu PERT metode za analizu vremena projekta. U numeričkom primeru koji je deo ovog rada prezentuje se primena koncepta fuzzy brojeva u analizi vremena trajanja projekta. Primena se zasniva na pretvaranju procenjenih trajanja aktivnosti u trapezoidne fuzzy brojeve, posle čega se primenjuju pravila fuzzy aritmetike i određuju vremenske rezerve i kritičan put projekta. U osnovi mnogih menadžerskih odluka danas stoji primena fuzzy sistema, a izvesno je da uključivanje fuzzy logike u projektno planiranje može pomoći menadžerima da donose kvalitetnije odluke i planove.

Ključne reči: projektno planiranje, analiza vremena, PERT metoda, kritičan put, fuzzy broj, fuzzy kritičan put

1. UVOD

U procesu planiranja realizacije projekta prisutna je neizvesnost koja se vezuje za trajanje aktivnosti, trajanje projekta, resurse, rizike, itd. Projektni menadžer mora ovu neizvesnost na adekvatan način tretirati, kako bi ishod planiranja bio zadovoljavajući. Ukoliko se elementi, koji su u fazi planiranja opterećeni neizvesnošću, ne razmotre na adekvatan način, potencijalni problemi koji se tokom realizacije projekta mogu javiti su kašnjenja u postavljenim rokovima, rast ukupnih troškova, te neefikasna krajnja realizacija. Time bi bio ugrožen cilj upravljanja projektom, a to je realizacija u najkraćem mogućem vremenu, sa minimalnim troškovima, a sa zadovoljavajućim kvalitetom.

Adresa autora: Danijela Toljaga Nikolić, Univerzitet u Beogradu, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, Jove Ilića 154

Rad primljen: 01.04.2014.

Rad prihvaćen: 14.04.2014.

Uspešnom realizacijom projekta, tj. ostvarivanjem specifičnih projektnih ciljeva, stvaraju se uslovi za ostvarivanje opštih ciljeva [1]. Jedan od važnih zadataka koji se postavlja pred projektnog menadžera jeste pronalaženje načina kako da se u proračunima tretira prisutna neizvesnost. Postoji realna potreba za pronalaženjem i uključivanjem koncepta koji obuhvataju pitanje neizvesnosti u implementaciju procedure planiranja realizacije projekta, pre svega u delu koji se tiče analize vremena.

U analizi vremena projekta primenjuju se metode, kao što su: metoda kritičnog puta (eng. Critical Path Method), PERT metoda (eng. Program Evaluation and Review Technique), prioritetna metoda (eng. Precedence Diagram Method). Projektni menadžer se tokom primene ovih metoda suočava sa problemom neizvesnosti, vezane najpre za procenu vremena trajanja projektnih aktivnosti, a kasnije i tokom određivanja kritičnih aktivnosti, te kritičnog puta i trajanja projekta.

Koncept koji menadžeru daje priliku da na adekvatan način obuhvati neizvesnost i uključi je u proces donošenja odluke i planiranje, jeste fuzzy koncept, koji se uspešno primenjuje u svim oblastima menadžerskog odlučivanja. Fuzzy koncept može da se implementira u pomenute metode za analizu vremena projekta i na taj način dođe do valjanih podataka o planiranom vremenu trajanja projekta, kritičnim aktivnostima projekta i kritičnom putu, što su važne informacije za otpočinjanje i kasnije upravljanje realizacijom projekta.

2. PRIMENA METODA ZA PLANIRANJE VREMENA REALIZACIJE PROJEKTA

Metode mrežnog planiranja (CPM, PERT, prioriteta metoda, i dr), koje se koriste u procesu planiranja realizacije projekta, omogućavaju da se u okviru analize vremena dobiju podaci važni za kasnije upravljanje realizacijom projekta. Analizi vremena prethodi analiza strukture, u okviru koje se, pored ostalog, definišu aktivnosti u projektu, procenjuju njihova trajanja i konstruiše mrežni dijagram.

Pre konstruisanja mrežnog dijagrama, definiše se WBS dijagram sa svim fazama i aktivnostima [2]. Zatim se pomoću mrežnog dijagrama dobija grafički prikaz redosleda odvijanja aktivnosti u projektu i njihove međusobne zavisnosti [3]. U okviru analize vremena se utvrđuje trajanje projekta i određuje kritičan put, kao vremenski najduži put realizacije projekta. Bez obzira na metodu koja se koristi u analizi vremena u projektnom planiranju, CPM, PERT ili prioriteta metoda, ulazni podatak za njihovu primenu su procenjena trajanja aktivnosti u projektu, što projektni menadžeri vrše na osnovu svog profesionalnog znanja, iskustva i raspoloživih informacija.

U stvarnosti, usled raspoloživosti i neizvesnosti informacija, kao i različitih mogućih scenarija, često je teško odrediti tačno vreme trajanja [4]. U mrežnim dijagramima gde su trajanja aktivnosti unapred poznata, problem određivanja kritičnih aktivnosti, događaja i kritičnog puta je jednostavan [5]. Kako se navodi u [6], projektni menadžeri se posebno suočavaju sa izazovom kada se nađu pred projektom u vezi sa kojim nemaju prethodno iskustvo. Ulazni podaci u tom slučaju, kao što je vreme trajanja aktivnosti i prethodnici, neće biti poznati sa sigurnošću. Kako se u [7] ističe, uključivanje fuzzy brojeva u analizu je alternativa koja omogućava suočavanje sa nepreciznim podacima.

Na osnovu kritičnog puta, donosilac odluke može kontrolisati vreme i troškove projekta i unaprediti efikasnost upotrebe resursa u projektu, čime obezbeđuje kvalitet rezultata projekta [8].

Određivanjem kritičnih aktivnosti u projektu moguće je alocirati resurse na ove aktivnosti i uticati na

vreme realizacije projekta. Poznaajući kritičan put, projektni menadžer može definisati bolju strategiju optimizacije vremena i alokacije resursa, kako bi osigurao planirani završetak i kvalitet projekta [9].

3. TEORIJA FUZZY SKUPOVA

Teoriju fuzzy skupova prvi je predstavio L. Zadeh 1965. god. [10]. Predstavlja pogodan matematički aparat za modeliranje različitih procesa u kojima dominira neizvesnost, višeznačnost, subjektivnost, neodređenost itd. Ova teorija omogućava tretiranje onih nedovoljno preciznih pojava koje se ne mogu modelirati samo teorijom verovatnoće ili intervalnom matematikom. U klasičnoj teoriji skupova postoji jasno definisana granica koja razdvaja elemente koji pripadaju određenom skupu od elemenata koji mu ne pripadaju, dok u teoriji fuzzy skupova ta jasna granica razdvajanja ne postoji. [11]. Neki skupovi imaju jasne granice (npr. pol, bračno stanje, i sl), ali postoje situacije gde pripadnost skupu nije jasno definisana (npr. temperatura, težina, brzina, i sl).

Kod ovih situacija nije jednostavno potvrditi da li element pripada skupu ili ne, jer npr. poimanje brzine nije isto za sve. [12] S obzirom da neprecizno definisani skupovi predstavljaju važan deo u procesu odlučivanja, oni se moraju na pravi način obuhvatiti, upravo pomoću teorije fuzzy skupova. Može se reći da je doprinos teorije fuzzy skupova u mogućnosti predstavljanja nejasnih podataka, a u okviru primene ove teorije moguće je korišćenje matematičkih operacija [11]. Primena fuzzy intervala i fuzzy aritmetike je demonstrirana u mnogim oblastima, a sa matematičke tačke gledišta, fuzzy aritmetika je sada uveliko razvijena [13].

3.1. Fuzzy skup i fuzzy broj

Fuzzy skup A se definiše kao skup uređenih parova $\{X, \mu_A(x)\}$, gde je X konačan skup $X=x_1+x_2+\dots+x_n$, a $\mu_A(x)$ funkcija pripadnosti. Pripadnost elemenata x skupu A se u teoriji fuzzy skupova opisuje funkcijom pripadnosti $\mu_A(x)$ na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako i samo ako } x \text{ pripada } A \\ 0, & \text{ako i samo ako } x \text{ ne pripada } A \end{cases} \quad (1)$$

Osim krajnjih vrednosti, funkcija pripadnosti može da uzme bilo koju drugu vrednost iz zatvorenog intervala $[0, 1]$. Funkcija pripadnosti $\mu_A(x)$ predstavlja stepen pripadnosti elemenata x skupu A . Što je $\mu_A(x)$ veće, utoliko ima više istine u tvrđenju da element x pripada skupu A [11].

Fuzzy broj je jedan od osnovnih pojmova u teoriji fuzzy skupova, a predstavlja normalizovan i konveksan fuzzy skup koji karakteriše interval poverenja $[a_1, a_2]$ i stepen sigurnosti α [11]. Koncept i osnovne karakteristike fuzzy brojeva su predstavljeni u [14], bazirano na principima datim od strane Zadeha u [10],

a kao osnovni oblici fuzzy broja predstavljeni su trouglasti i trapezoidni fuzzy brojevi. U skladu sa tim, u [8] se prezentuju osobine trouglastog i trapezoidnog fuzzy broja. Kod primene fuzzy brojeva, rezultat kalkulacije zavisi od oblika funkcije pripadnosti. Fuzzy brojevi sa jednostavnijim oblikom funkcije pripadnosti uglavnom imaju jednostavniju interpretaciju [15].

Trouglasti fuzzy broj je uslovljen oblikom funkcije pripadnosti i ima oblik:

$$A = (a, b, c),$$

gde je:

a – donja (leva) granica fuzzy broja,

b – vrednost fuzzy broja sa najvećim stepenom pripadnosti,

c – gornja (desna) granica fuzzy broja.

Trouglasti fuzzy broj ima funkciju pripadnosti $\mu_A(x): R \rightarrow [0, 1]$ definisanu na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ \frac{c-x}{c-b}, & b \leq x \leq c \\ 0, & \text{u svakom drugom slučaju} \end{cases} \quad (2)$$

pri čemu je $a \leq b \leq c$

Pored trouglastog fuzzy broja postoji i trapezoidni fuzzy broj, definisan oblikom:

$$A = (a, b, c, d),$$

gde je:

a – donja (leva) granica fuzzy broja,

b, c – vrednosti fuzzy broja sa funkcijom pripadnosti 1,

d – gornja (desna) granica fuzzy broja.

Trapezoidni fuzzy broj ima funkciju pripadnosti $\mu_A(x): R \rightarrow [0, 1]$ definisanu na sledeći način:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & a \leq x < b \\ 1, & b \leq x < c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \leq x \leq d \\ 0, & \text{u svakom drugom slučaju} \end{cases} \quad (3)$$

pri čemu je $a \leq b \leq c \leq d$.

Kako se u [4] navodi, razlozi korišćenja trapezoidnog ili trouglastog fuzzy broja su jednostavnost primene i interpretacije.

Npr. donosilac odluke može svoju subjektivnu procenu da će aktivnosti trajati približno 50 sati, prezentovati trapezoidnim fuzzy brojem (45, 50, 50, 55) ili trouglastim fuzzy brojem (45, 50, 55). Procena trajanja "približno između 50 i 60 sati" može se prezentovati u obliku (45, 50, 60, 65).

3.2. Operacije nad fuzzy brojevima

U skladu sa karakteristikama fuzzy brojeva koji su date u [14] i principima koje je postavio Zadeh u [10], definisane su operacije nad fuzzy brojevima. Prema [8], za dva trapezoidna fuzzy broja $A = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ i $B = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, operacije fuzzy sabiranja i fuzzy oduzimanja definisane su na sledeći način:

$$A \oplus B = (a_1+a_2, b_1+b_2, c_1+c_2, d_1+d_2) \quad (4)$$

$$A \ominus B = (a_1-d_2, b_1-c_2, c_1-b_2, d_1-a_2) \quad (5)$$

Prema primeru koji se daje u [8], za dva trapezoidna fuzzy broja $A = (16, 20, 22, 24)$ i $B = (3, 4, 5, 6)$, može se izračunati da je:

$$A \oplus B = (16, 20, 22, 24) \oplus (3, 4, 5, 6) = (19, 24, 27, 30)$$

$$A \ominus B = (16, 20, 22, 24) \ominus (3, 4, 5, 6) = (10, 15, 18, 21)$$

3.3. Rangiranje fuzzy brojeva

Kod implementacije fuzzy koncepta u primenu PERT metode za analizu vremena, rangiranje fuzzy brojeva je važan deo postupka. Kako se smatra u [16], u slučaju dva realna broja nije teško utvrditi poredak od manjeg ka većem, dok u rangiranju dva fuzzy broja postoji nekoliko koraka i formula. Trapezoidni fuzzy broj $A = (a_1, b_1, c_1, d_1)$ je veći od trapezoidnog fuzzy broja $B = (a_2, b_2, c_2, d_2)$, samo ako je $a_1 > a_2$, $b_1 > b_2$, $c_1 > c_2$, $d_1 > d_2$. U svim drugim slučajevima mora se koristiti neka od metoda rangiranja. Za probleme odlučivanja prezentovane trapezoidnim fuzzy brojevima, razvijena je metoda rangiranja nastala kombinacijom metode rangiranja koja je predložena u [17] i koncepta evaluacije sklonosti ka riziku donosioca odluke, koji je prezentovan u [18].

Vrednost \hat{a} može se definisati kao vrednost koja opisuje stav donosioca odluke prema riziku. Ako je $\hat{a} = 0.5$, tada je on neutralan prema riziku. Ako je $\hat{a} < 0.5$, tada donosilac odluka ima averziju prema riziku, dok ako je $\hat{a} > 0.5$, on ima sklonost ka riziku. Ovu vrednost može definisati sam donosilac odluke, ali se ona takođe može izračunati [4].

U cilju jednostavnije implementacije, u [18] je predložen koncept za izračunavanje vrednosti indeksa \hat{a} . Kod rešavanja problema pronalaženja fuzzy kritičnog puta, za trapezoidni fuzzy broj $(a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij})$ kojim se opisuje trajanje aktivnosti A_{ij} (gde A_{ij} pripada skupu svih aktivnosti u projektu), vrednost indeksa se može izračunati preko formule:

$$\hat{a} = t \quad (6)$$

gde t predstavlja broj aktivnosti u mrežnom dijagramu projekta.

Formula za određivanje ranga trapezoidnog fuzzy broja $A_i = (a_i, b_i, c_i, d_i)$ ima sledeći oblik:

$$R(A_i) = \hat{a}[(d_i - x_1)/(x_2 - x_1 - c_i + d_i)] + (1 - \hat{a})[(1 - (x_2 - a_i)/(x_2 - x_1 + b_i - a_i))] \quad (7)$$

gde \hat{a} predstavlja indeks stava donosioca odluke prema riziku, $x_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a $x_2 = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$. Poređenjem trapezoidnih fuzzy brojeva za koje se po formuli (7) izračuna vrednost ranga, zaključuje se da je najveći onaj broj čija je vrednost ranga najveća. U vezi sa prethodno navedenim, kada se određuje rang trouglastog fuzzy broja (a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) , postavi se da je $a_{ij} = b_{ij}$ u formuli (7) i izračuna rang [4].

4. ANALIZA I UTVRĐIVANJE FUZZY KRITIČNOG PUTA PRIMENOM FUZZY PERT METODE

PERT metoda (Program Evaluation and Review Technique) primenjuje se za analizu vremena kod onih projekata kod kojih vreme realizacije aktivnosti nije unapred poznato i ne može se jednoznačno odrediti. Zbog toga se vrši procena tri vrednosti za trajanje svake aktivnosti i na osnovu njih dobija njeno očekivano trajanje. Budući da nije uvek jednostavno napraviti procenu trajanja aktivnosti, niti primenom formula u okviru PERT metode dobiti zadovoljavajuće rezultate, projektni menadžeri uključuju fuzzy koncept u primenu ove metode i tako dobijaju jedan moćan alat za proračune u okviru analize vremena projekta. Prednost primene fuzzy PERT metode u analizi vremena projekta je u primeni fuzzy aritmetičkih operacija u određivanju elemenata koje obuhvata analiza vremena po PERT metodi [19].

Elementi koje u okviru analize fuzzy kritičnog puta, primenom fuzzy PERT metode, treba definisati, su sledeći:

- N: skup svih događaja u mrežnom dijagramu projekta
- A_{ij} : aktivnost između događaja i i j
- FET_{ij} : fuzzy vreme aktivnosti A_{ij}
- FES_j : najranije fuzzy vreme odigravanja događaja j
- FLF_j : najkasnije fuzzy vreme odigravanja događaja j
- FTS_{ij} : ukupna fuzzy vremenska rezerva aktivnosti A_{ij}
- $S(j)$: skup svih aktivnosti sledbenika događaja j
- $NS(j)$: skup svih događaja povezanih sa aktivnostima sledbenicima događaja j : $NS(j) = \{k \mid A_{jk} \in S(j), k \in N\}$
- $F(j)$: skup svih aktivnosti prethodnika događaja j
- $NP(j)$: skup svih događaja povezanih sa aktivnostima prethodnicima događaja j : $NP(j) = \{i \mid A_{ij} \in F(j), i \in N\}$
- P_i : i -ti put u mrežnom dijagramu

- P: skup svih puteva u mrežnom dijagramu
- $FCPM(P_k)$: fuzzy vreme završetka puta P_k u mrežnom dijagram projekta [4]

U okviru analize fuzzy kritičnog puta koristi se nekoliko formula, koje se navode u [4]. Polazna pretpostavka je da su fuzzy vremena trajanja svih aktivnosti u projektu prikazana u obliku trapezoidnih fuzzy brojeva. Početni događaj projekta inicira se sa 0, tj. $FES_1 = (0, 0, 0, 0)$.

Dalje se izračunavaju najranija fuzzy vremena odigravanja događaja po formuli:

$$FES_j = \max\{FES_i \oplus FET_{ij} \mid i \in NP(j), j \neq 1, j \in N\} \quad (8)$$

Zatim se računaju najkasnija fuzzy vremena odigravanja događaja po formuli:

$$FLF_j = \min\{FLF_k \ominus FET_{jk} \mid k \in NS(j), j \neq n, j \in N\} \quad (9)$$

Ukupna fuzzy vremenska rezerva aktivnosti A_{ij} računa se po formuli:

$$FTS_{ij} = FLF_j \ominus (FES_i \oplus FET_{ij}), 1 \leq i < j \leq n, i, j \in N \quad (10)$$

Fuzzy vreme završetka puta P_k u mrežnom dijagramu projekta računa se po formuli:

$$FCPM(P_k) = \sum FTS_{ij}, 1 \leq i < j \leq n, i, j \in P_k, P_k \in P \quad (11)$$

Ako se pretpostavi da postoji put P_c u mrežnom dijagramu projekta, takav da je:

$$FCPM(P_c) = \min\{FCPM(P_i) \mid P_i \in P\} \quad (12)$$

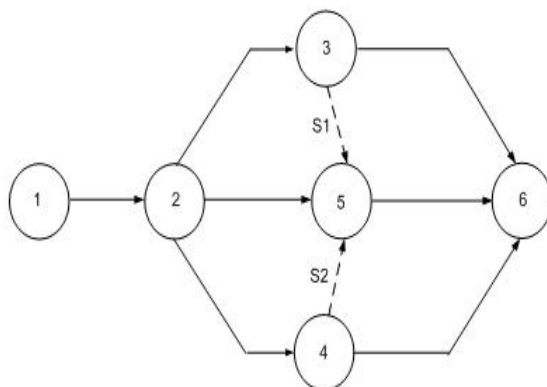
tada se kaže da je P_c fuzzy kritičan put.

Cilj primene algoritma za utvrđivanje fuzzy kritičnog puta je utvrđivanje kritičnog puta projekta u fuzzy okruženju. Vremena trajanja aktivnosti mogu se izraziti u obliku trapezoidnih fuzzy brojeva. Kako se navodi u [4], faze algoritma su sledeće:

1. Identifikovati aktivnosti u projektu
2. Utvrditi međusobnu povezanost aktivnosti i veze tipa prethodnik-sledbenik
3. Proceniti fuzzy vreme trajanja za svaku aktivnost u projektu
4. Konstruisati mrežni dijagram
5. Postaviti najraniji početak projekta na $FES_1 = (0, 0, 0, 0)$ i izračunati najranije odigravanje svih događaja $FES_j, j=2, 3, \dots, n$
6. Postaviti kao najkasnije vreme odigravanja događaja n , vrednost najranijeg vremena odigravanja događaja n , $FLF_n = FES_n$ i izračunati najkasnija vremena odigravanja svih događaja $FLF_j, j = n-1, n-2, \dots, 2, 1$
7. Izračunati ukupnu fuzzy vremensku rezervu FTS_{ij} za sve aktivnosti A_{ij}
8. Utvrditi sve moguće kritične puteve i izračunati $FCPM(P_k)$ - fuzzy vreme završetka puta P_k u mrežnom dijagramu projekta
9. Utvrditi fuzzy kritičan put

10. Utvrditi istinitost da će projekat biti završen u predviđenom vremenu

4.1. Numerički primer primene fuzzy PERT metode



Slika 1 - Mrežni dijagram projekta

Tabela 1- Trajanja aktivnosti (u danima) izražena u obliku trapezoidnih fuzzy brojeva

A_{ij}	(1,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(3,6)	(4,6)	(5,6)
Trajanje (t_{ij})	(1,3,5,7)	(3,5,7,9)	(1,4,6,10)	(2,5,9,11)	(0,0,0,0)	(0,0,0,0)	(8,9,10,11)	(2,4,6,8)	(3,5,7,9)

Na primeru mrežnog dijagrama projekta datog na slici 1. biće prikazana primena fuzzy PERT metode u analizi vremena. Trajanja aktivnosti u projektu predstavljena su trapezoidnim fuzzy brojevima (tabela 1), vremenska jedinica je dan. Na primer, za trajanje aktivnosti (2, 3) projektni menadžer procenjuje da će trajati aproksimativno između 5 i 7 dana, odnosno iskazano u obliku trapezoidnog fuzzy broja (3, 5, 7, 9)

Koristeći formulu (6) izračunava se indeks sklonosti prema riziku donosioca odluke, čija će vrednost kasnije biti primenjena za rangiranje fuzzy brojeva. Vrednost indeksa u ovom slučaju iznosi 0.504. Sledeći korak jeste izračunavanje najranijih fuzzy vremena odigravanja događaja FES_j . S obzirom da FES_1 predstavlja početni događaj projekta, njegova vrednost se inicira sa (0,0,0,0).

$$FES_1 = (0,0,0,0).$$

Za FES_j , gde je $j=2, 3, \dots, n$, računa se najranije vreme odigravanja događaja, koristeći formulu (8), a na osnovu pravila za sabiranje fuzzy brojeva iz formule (4).

$$FES_2 = FES_1 \oplus FET_{12} = (0,0,0,0) \oplus (1,3,5,7) = (1,3,5,7),$$

$$FES_3 = FES_2 \oplus FET_{23} = (1,3,5,7) \oplus (3,5,7,9) = (4,8,12,16)$$

$$FES_4 = FES_2 \oplus FET_{24} = (1,3,5,7) \oplus (1,4,6,10) = (2,7,11,17)$$

$$FES_5 = \max\{FES_2 \oplus FET_{25}, FES_3 \oplus FET_{35}, FES_4 \oplus FET_{45}\} = \max\{(3,8,14,18), (4,8,12,16), (2,7,11,17)\}$$

Navedena tri fuzzy broja treba rangirati, a pošto je poznata vrednost \hat{a} , potrebno je odrediti vrednosti x_1 i x_2 za fuzzy brojeve (3, 8, 14, 18), (4, 8, 12, 16) i (2, 7, 11, 17). Kako je $x_1 = \min\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, a $x_2 = \max\{d_1, d_2, \dots, d_n\}$, sledi da je $x_1 = 2$ i $x_2 = 18$.

Primenom formule (7) za određivanje ranga trapezoidnog fuzzy broja, dobijaju se sledeće vrednosti:

$$R(3, 8, 14, 18) = 0.504[(18-2)/(18-2-14+18)] + (1-0.504)[1-(18-3)/(18-2+8-3)] = 0.5449$$

$$R(4,8,12,16) = 0.504[(16-2)/(18-2-12+16)] + (1-0.504)[1-(18-4)/(18-2+8-4)] = 0.5016$$

$$R(2,7,11,17) = 0.504[(17-2)/(18-2-11+17)] + (1-0.504)[1-(18-2)/(18-2+7-2)] = 0.4617$$

Kako je $R(3, 8, 14, 18) > R(4, 8, 12, 16) > R(2, 7, 11, 17)$, u ovom slučaju je $FES_5 = (3, 8, 14, 18)$.

$$FES_6 = \max\{FES_3 \oplus FET_{36}, FES_4 \oplus FET_{46}, FES_5 \oplus FET_{56}\} = \max\{(12,17,22,27), (4,11,17,25), (6,13,21,27)\}$$

Ponavljajući postupak rangiranja tri fuzzy broja i dobijaju sledeće vrednosti za njihove rangove:

$$R(12,17,22,27) = 0.504[(27-4)/(27-4-22+27)] + (1-0.504)[1-(27-12)/(27-4+17-12)] = 0.6443$$

$$R(4,11,17,25) = 0.504[(25-4)/(27-4-17+25)] + (1-0.504)[1-(27-4)/(27-4+11-4)] = 0.4571$$

$$R(6,13,21,27) = 0.504[(27-4)/(27-4-21+27)] + (1-0.504)[1-(27-6)/(27-4+13-6)] = 0.5485$$

Kako je $R(12,17,22,27) > R(6,13,21,27) > R(4,11,17,25)$, sledi da je $FES_6 = (12,17,22,27)$.

Događaj 6 je završni događaj projekta, sledi da je najkasnije vreme odigravanja ovog događaja FLF_6 je-

dnako najranijem vremenu odigravanja događaja FES_6 . Odnosno, u ovom slučaju, projekat će trajati aproksimativno između 17 i 22 sata.

Sledi izračunavanje najkasnijih vremena odigravanja događaja FLF_i , primenom formule (9).

$$FLF_6 = FES_6 = (12, 17, 22, 27)$$

$$FLF_5 = FLF_6 \ominus FET_{56} = (12, 17, 22, 27) \ominus (3, 5, 7, 9) = (3, 10, 17, 24)$$

$$FLF_4 = \min\{FLF_6 \ominus FET_{46}, FLF_5 \ominus FET_{45}\} = \min\{(4, 11, 18, 25), (3, 10, 17, 24)\}$$

Dva fuzzy broja treba rangirati, poznata je vrednost \hat{a} , a za fuzzy brojeve $(4, 11, 18, 25)$ i $(3, 10, 17, 24)$ sledi da je $x_1 = 3$ i $x_2 = 25$. Primenom formule (7) za određivanje ranga trapezoidnog fuzzy broja, dobijeno je sledeće:

$$R(4, 11, 18, 25) = 0.504[(25 - 3)/(25 - 3 - 18 + 25)] + (1 - 0.504)[1 - (25 - 4)/(25 - 3 + 11 - 4)] = 0.5192$$

$$R(3, 10, 17, 24) = 0.504[(24 - 3)/(25 - 3 - 17 + 24)] + (1 - 0.504)[1 - (25 - 3)/(25 - 3 + 10 - 3)] = 0.4847$$

Kako je $R(4, 11, 18, 25) > R(3, 10, 17, 24)$, tada je $FLF_4 = (4, 11, 18, 25)$.

$$FLF_3 = \min\{FLF_6 \ominus FET_{36}, FLF_5 \ominus FET_{35}\} = \min\{(1, 7, 13, 19), (3, 10, 17, 24)\}$$

Primenom formule (7) za određivanje ranga trapezoidnog fuzzy broja, dobija se:

$$R(1, 7, 13, 19) = 0.504[(19 - 1)/(24 - 1 - 13 + 19)] + (1 - 0.504)[1 - (24 - 1)/(24 - 1 + 7 - 1)] = 0.4154$$

$$R(3, 10, 17, 24) = 0.504[(24 - 1)/(24 - 1 - 17 + 24)] + (1 - 0.504)[1 - (24 - 3)/(24 - 1 + 10 - 3)] = 0.5352$$

Kako je $R(3, 10, 17, 24) > R(1, 7, 13, 19)$, sledi da je $FLF_3 = (3, 10, 17, 24)$.

$$FLF_2 = \min\{FLF_5 \ominus FET_{25}, FLF_4 \ominus FET_{24}, FLF_3 \ominus FET_{23}\} = \min\{(-8, 1, 12, 22), (-6, 5, 14, 24), (-6, 3, 12, 21)\}$$

Tri fuzzy broja se rangiraju primenom formule (7) i dobija:

$$R(-8, 1, 12, 22) = 0.504[(22 + 8)/(24 + 8 - 12 + 22)] + (1 - 0.504)[1 - (24 + 8)/(24 + 8 + 1 + 8)] = 0.4688$$

$$R(-6, 5, 14, 24) = 0.504[(24 + 8)/(24 + 8 - 14 + 24)] + (1 - 0.504)[1 - (24 + 6)/(24 + 8 + 5 + 6)] = 0.5339$$

$$R(-6, 3, 12, 21) = 0.504[(21 + 8)/(24 + 8 - 12 + 21)] + (1 - 0.504)[1 - (24 + 6)/(24 + 8 + 3 + 6)] = 0.4895$$

Kako je $R(-6, 5, 14, 24) > R(-6, 3, 12, 21) > R(-8, 1, 12, 22)$, u ovom slučaju je $FLF_2 = (-6, 5, 14, 24)$.

$$FLF_1 = FLF_2 \ominus FET_{12} = (-6, 5, 14, 24) \ominus (1, 3, 5, 7) = (-13, 0, 11, 23)$$

Najkasnija vremena aktivnosti u mrežnom dijagramu računaju se fuzzy retrogradnom metodom, čiju primenu karakteriše jedan nedostatak, a to je da se kao najkasnija vremena realizacije aktivnosti mogu dobiti negativne vrednosti, koje se u praksi teško mogu objasniti. Takođe, negativne vrednosti se mogu javiti i kod izračunavanja vremenskih rezervi za nekritične aktivnosti, koje isto tako nemaju praktično značenje. Rešenje ovog problema je ponuđeno u [19], modifikovanjem retrogradne metode, tako da se primenom algoritma koji je prezentovan dobijaju samo pozitivne vrednosti fuzzy brojeva. Kod analize fuzzy kritičnog puta primenom fuzzy PERT metode ne može se na klasičan način kao kod PERT metode odrediti kritičan put preko događaja kod kojih se najranija i najkasnija vremena poklapaju. Potrebno je najpre odrediti ukupne vremenske rezerve svih aktivnosti, a kritičan put će činiti one aktivnosti čiji je zbir rezervi najmanji.

Primenom formule (10) određuju se vremenske rezerve aktivnosti u projektu:

$$FTS_{12} = FLF_2 \ominus (FES_1 \oplus FET_{12}) = (-6, 5, 14, 24) \ominus ((0, 0, 0, 0) \oplus (1, 3, 5, 7)) = (-13, 0, 11, 23)$$

$$FTS_{23} = (-13, -2, 9, 20)$$

$$FTS_{24} = (-13, 0, 11, 23)$$

$$FTS_{25} = (-15, -4, 9, 21)$$

$$FTS_{36} = (-15, -5, 5, 15)$$

$$FTS_{46} = (-13, 0, 11, 23)$$

$$FTS_{56} = (-15, -4, 9, 21)$$

Sada se utvrđuju svi mogući kritični putevi i računata $FCPM(P_k)$ za svaki, primenom formule (11).

$$P = \{(1, 2, 3, 6), (1, 2, 3, 5, 6), (1, 2, 5, 6), (1, 2, 4, 5, 6), (1, 2, 4, 6)\}$$

$$FCPM(P_1) = FTS_{12} + FTS_{23} + FTS_{36} = (-13, 0, 11, 23) + (-13, -2, 9, 20) + (-15, -5, 5, 15) = (-41, -7, 25, 58)$$

$$FCPM(P_2) = (-41, -6, 29, 64)$$

$$FCPM(P_3) = (-43, -8, 29, 65)$$

$$FCPM(P_4) = (-41, -4, 31, 67)$$

$$FCPM(P_5) = (-39, 0, 33, 69)$$

Da bi se utvrdio fuzzy kritičan put, potrebno je rangirati dobijene vrednosti $FCPM(P_k)$, $k=1, \dots, 5$, primenom formule (7) za određivanje ranga i poznate vrednosti $\hat{a} = 0.504$.

$$R(-41, -7, 25, 58) = 0.4585$$

$$R(-41, -6, 29, 64) = 0.4775$$

$$R(-43, -8, 29, 65) = 0.4715$$

$$R(-41, -4, 31, 67) = 0.4907$$

$$R(-39, 0, 33, 69) = 0.5096$$

Kritičan put čiji je rang najmanji, prema formuli (12), predstavlja fuzzy kritičan put. U ovom slučaju je: $0.4585 < 0.4715 < 0.4775 < 0.4907 < 0.5096$.

Na osnovu prethodne analize i dobijenih vrednosti, sledi da je fuzzy kritičan put projekta put P_1 , odnosno put na kome se nalaze događaji 1–2–3–6. Trajanje projekta je izraženo trapezoidnim fuzzy brojem (12, 17, 22, 27), pa se zaključuje da će posmatrani projekat trajati aproksimativno između 17 i 22 dana.

5. ZAKLJUČAK

Metode i tehnike koje se koriste u planiranju vremena realizacije projekata, zahtevaju određena poboljšanja, kako bi se na što bolji način obuhvatila neizvesnost prisutna u procenama projektnog menadžera. Metode poput CPM ili PERT ne daju dovoljno dobre rezultate kada je u pitanju analiza vremena projekta, a u vezi sa određivanjem vremena trajanja aktivnosti u projektu, što predstavlja osnovni ulazni podatak za primenu ovih metoda. Pre svega, vremena trajanja aktivnosti su retko kada deterministička i jednoznačna, što je preduslov za primenu CPM metode.

Zatim, kod primene PERT metode oslanjanje na verovatnoću u uslovima neizvesnosti je rizično, potrebni su podaci iz ranijih projekata koji nisu uvek na raspolaganju, a česta je i subjektivna procena trajanja aktivnosti od strane projektnog menadžera.

Prioritetna metoda je donela poboljšanja u odnosu na CPM i PERT metodu u smislu načina grafičkog prikazivanja odvijanja aktivnosti čiji se počeci i završeci u projektu preklapaju, ali po pitanju načina uključivanja neizvesnosti u odlučivanju i proceni nije donela napredak.

Uključivanje fuzzy koncepta u primenu ovih metoda omogućava obuhvatanje neizvesnosti u odlučivanju na veoma uspešan način. Fuzzy sistemi su pogodan matematički aparat za modelovanje različitih procesa u kojima dominira neizvesnost, višeznačnost, subjektivnost i neodređenost. Koristeći trapezoidne brojeve u proceni vremena trajanja aktivnosti, donosilac odluke može veoma uspešno da obuhvati sve moguće ishode.

U numeričkom primeru koji je deo ovog rada prezentovana je primena koncepta fuzzy brojeva u analizi vremena trajanja projekta. Primena se zasniva na pretvaranju procenjenih trajanja aktivnosti u trapezoidne fuzzy brojeve, posle čega se primenjuju pravila fuzzy aritmetike i određuju vremenske rezerve i kritičan put projekta.

Zbog prirode trapezoidnog fuzzy broja, vrednost trajanja projekta koja je dobijena na kraju je aproksimativna, ali je važan podatak za projektnog menadžera. Imajući uvid u interval planiranog trajanja projekta, tokom praćenja i kontrole realizacije projekta moguće je blagovremeno reagovati na eventualna odstupanja i sprečiti udaljavanje od planiranih veličina.

Primena koncepta fuzzy sistema danas je česta osnova menadžerskog odlučivanja, jer se primenom fuzzy sistema na drugačiji način obuhvata realnost i uspešnije suočava sa postojećom neizvesnošću. Izvesno je da će uključivanje fuzzy logike u projektno planiranje pomoći menadžerima da donesu kvalitetnije odluke i da će tek rasti značaj ovog pristupa.

ZAHVALNOST

U radu su saopšteni rezultati istraživanja na projektu Osnovnih istraživanja, evidencioni broj 179081, koji finansira Ministarstvo prosvete, nauke i tehnološkog razvoja Republike Srbije.

LITERATURA

- [1] Mihić, M., Vučković, A., Vučković, M., Upravljanje koristima u projektima energetske efikasnosti u javnim zgradama u Srbiji, *Management*, vol. XVII, br. 62, p. 57-65, 2012.
- [2] Stošić, B., Iščlamović, S., Mihić, M., Improvement of Innovation Project Risk Identification by Applying RBS Method, *Metalurgia International*, vol. 18, no. 2, 2013.
- [3] Jovanović, P., Upravljanje projektom (X izdanje), Visoka škola za projektni menadžment Beograd, 2012.
- [4] Liang, G., Han, T., Fuzzy Critical Path for Project Network, *Information and Management Sciences*, vol. 15, no. 4, p. 29-40, 2004.
- [5] Chanas, S., Zielinski, P., Critical Path Analysis in the Network with Fuzzy Activity Times, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, no. 2, p. 195-204, 2001.
- [6] McCahon, C., Lee, E., Project Network Analysis with Fuzzy Activity Times, *Computers & Mathematics Applications*, vol. 15, no. 10, p. 829-838, 1988.
- [7] Ravi Shankar, N., Sireesha, V., Sireesha, S., Usha Madhuri, K., Measuring Risk Element Criticality in a Fuzzy Project Network Using Trapezoidal Fuzzy Number Method, *Applied Mathematical Sciences*, vol. 5, no. 11, p. 529-539, 2011.
- [8] Shankar, N., Sireesha, V., Bushan Rao, P., An Analytical Method for Finding Critical Path in a Fuzzy Project Network, *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 5, no. 20, p. 953-962, 2010.
- [9] Sathish, S., Ganesan, K., A Simple Approach to Fuzzy Critical Path Analysis in Project Networks, *International Journal of Scientific & Engineering Research*, vol. 2, issue 12, p. 1-6, 2011.
- [10] Zadeh, L. A., Fuzzy sets, *Information and control*, vol. 8, p. 338-353, 1965.
- [11] Čupić, M., Suknović, M., Odlučivanje, Fakultet organizacionih nauka, Beograd, 2008.

- [12]Massad, E., Ortega, N., Basic Concepts of Fuzzy Sets Theory. U E. Massad, N. Ortega, L. Barros, & C. Struchiner, Fuzzy Logic in Action: Applications in Epidemiology and Beyond, Springer-Verlag, Berlin, p. 11-40, 2008.
- [13]Enea, M., Piazza, T., Project Selection by Constrained Fuzzy AHP, Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 3, issue 1, p. 39-62, 2004.
- [14]Dubois, D., Prade, H., Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Sciences, vol. 9, no. 6, p. 613-626, 1978.
- [15]Grzegorzewski, P., Mrowka, E., Trapezoidal Approximations of Fuzzy Numbers, Fuzzy sets and systems - IFSA 2003: 10th international fuzzy systems association world congress, Istanbul, Turkey: Springer-Verlag, Berlin, p. 237-24, 2003.
- [16]Sharafi, M., Jolai, F., Iranmanesh, H., Hatefi, S., A Model for Project Scheduling with Fuzzy Precedence Links, Australian Journal of Basic and Applied Sciences, vol. 2, no. 4, p. 1356-1361, 2008.
- [17]Liang, G., Wang, M., Benefit/Cost Analysis Using Fuzzy Concept, The Engineering Economist, vol. 40, p. 359-376, 1995.
- [18]Chang, P., Chen, Y., A Fuzzy Multi-criteria Decision Making Method for Technology Transfer Strategy Selection in Biotechnology. Fuzzy Sets and Systems, vol. 63, p. 131-139, 1994.
- [19]Soltani, A., Haji, R., A Project Scheduling Method Based on Fuzzy Theory, Journal of Industrial and Systems Engineering, vol. 1, no. 1, p. 70-80, 2007.

SUMMARY

APPLICATION OF FUZZY PERT METHOD IN PROJECT PLANNING

In the process of project planning, it is necessary that the project manager should carefully assess the values of the input elements of the process, which are often laden with uncertainty. Since this is a project to be executed in the future, currently not all conditions are known in advance under which the activities will take place. This why certain values, such as the duration of an activity, the quantity of necessary resources etc, cannot be accurately determined in the planning stage. That said, there is a need to find the adequate way to deal with that uncertainty and successful project planning. The paper presents features and the basic elements of including the fuzzy system in the application of the PERT method in order to analyze the duration of the project. The numeric example which is a part of this paper features the application of the fuzzy numbers concept in the project duration analysis. The application is based on turning the estimated duration of the activity into trapezoidal fuzzy numbers, after which the rules of the fuzzy arithmetics are applied, and the temporal reserves and the critical project path are determined. The application of the fuzzy system underlies numerous managerial decisions. Furthermore, it is certain that the incorporation of the fuzzy logic into project planning may help managers bring better decisions and make better plans.

Key words: project planning, time analysis, PERT method, critical path, fuzzy number, fuzzy critical path